（後期日程）

令和５年度　数　学

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，３ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。

5　問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

6　解答用紙はすべて机の上に出しておくこと。机の中に入れてはいけません。

$\boxed{1}$

次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) $a_0 = \int_0^1 e^{2x}dx$, $a_n = \int_0^1 x^n e^{2x}dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$とおくとき，

$a_0 = \boxed{\text{ア}}$ であり，$2a_n + na_{n-1} = \boxed{\text{イ}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$である。

(2) 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ を考える。曲線 $y = f(x)$ 上の 3 点 A$(1, f(1))$，B$(4, f(4))$，P$(t, f(t))$ $(1 < t < 4)$について，直線 AB の傾きは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\triangle$ABP の面積が最大となるとき，$t = \boxed{\text{エ}}$ である。

(3) a，b を正の実数とする。関数

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2e^{ax} & (x < 0) \\ \sin\dfrac{x}{a} + b & (x \geqq 0) \end{cases}$$

が $x = 0$ で微分可能であるとき，$a = \boxed{\text{オ}}$，$b = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) t を媒介変数として $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$で表される曲線 C について，$t = \pi$ に対応する点における接線の傾きは $\boxed{\text{キ}}$ であり，C の長さは $\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) 1 から 7 までの番号が 1 つずつ書かれた 7 枚のカードの中から 1 枚のカードを引き，書かれた番号を調べてもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，1 回目，2 回目，3 回目に引いたカードの番号を順に a，b，c とする。このとき，$a < b < c$ となる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，$a \leqq b \leqq c$ となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。

数学の試験問題は次に続く。

2

以下の問いに答えよ。

(1) 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，辺OC，BA，OA，BCを$1:2$に内分する点をそれぞれM，N，P，Qとおくとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を求めよ。

(2) nを整数とし，zを0でない複素数とする。$z+\dfrac{1}{z}$が実数であるとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$が実数であることを示せ。

(3) 関数$f(x)=-2\sqrt{3}x+2\sin 2x+1$（$0\leqq x\leqq\pi$）を考える。

(i) $y=f(x)$の最大値と最小値を求めよ。

(ii) kを実数とする。$0\leqq x\leqq\pi$において方程式$f(x)=k$が異なる2つの実数解をもつとき，kのとり得る値の範囲を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$

t を $0 < t < 4$ を満たす実数とする。座標平面上において，中心が点 $\mathrm{T}(1,\ t)$，半径が 1 の円を C とする。2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 4)$ から C に引いた接線をそれぞれ ℓ, m とおく。ただし，ℓ, m は y 軸ではないとする。

以下の問いに答えよ。

(1) C の方程式を t を用いて表せ。

(2) ℓ の方程式を t を用いて表せ。

(3) m の方程式を t を用いて表せ。

(4) ℓ と m が交点を持ち，その交点の x 座標が正であるとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(5) t の値が (4) の範囲にあるとき，ℓ と m の交点を P とおく。$\triangle\mathrm{OAP}$ の面積の最小値を求めよ。