

1. 緒言

マイクロポーラ弾性理論は、材料の物体点に変位の自由度を加えて微細要素の回転自由度を導入した連続体理論であり、微細構造を有する材料の特異な力学挙動を表現できる。

本研究では、マイクロポーラ弾性理論に対応した有限要素法を用いて位相形態最適化を実施し、得られた最適構造を通常材料へ変換するプロセスを構築する。さらに、断面形状を調整することによりマイクロポーラ材料特有の変形特性を疑似的に再現し、意匠性と力学的合理性を両立した構造設計の可能性を検討する。

2. マイクロポーラ弾性理論

2つのマイクロひずみテンソル e_{ij} と γ_{ijk} はマイクロ変位テンソル ϕ_{ij} とマイクロ変位勾配 $u_{j,i}$ を用いて式(1)で表される。

$$\begin{cases} e_{ij} = u_{j,i} + \phi_{ij} = \varepsilon_{j,i} - \varepsilon_{ijk}(\omega_k - \phi_k) \\ \gamma_{ijk} = \phi_{ij,k} = -\varepsilon_{ijk}\phi_{l,k} \end{cases} \quad \#(1)$$

ここで、 ε_{ijk} は交代記号である。

応力テンソル t_{ij} と偶応力テンソル m_{ij} はマイクロひずみ e_{ij} とマイクロ回転 ϕ_k を用いて式(2)で表される。

$$\begin{cases} t_{ij} = \lambda e_{rr}\delta_{ij} + (\mu + \kappa)e_{ij} + \mu e_{ji} \\ m_{ij} = \alpha\phi_{r,r}\delta_{ij} + \beta\phi_{i,j} + \gamma\phi_{i,j} \end{cases} \quad \#(2)$$

ここで δ_{ij} はクロネッカー記号である。

材料定数は以下の関係にある。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \kappa = \frac{N^2 E}{(1+\nu)(1-N^2)}, \mu = \frac{(1-2N^2)E}{2(1+\nu)(1-N^2)} \quad \#(3)$$

E, ν, N はヤング率, ポアソン比, 適合度を指す。

3. マイクロポーラ弾性理論に対応した有限要素法の定式化

3-1 変位

本マイクロポーラ弾性理論を組み込んだ各未知変位を形状関数 N および各節点変位を用いて変位ベクトルで表す。

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{ii} & 0 \\ 0 & N^{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^i \\ \phi^i \end{Bmatrix} \quad \#(4)$$

ここで、 u はマクロ変位、 ϕ はマイクロ変位である。

3-2 ひずみ・応力

ひずみを各節点変位で次式のように表し、応力とひずみの関係は、式(2)の構成式により、式(5)で表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} e_{ij} \\ \phi_{i,j} \end{Bmatrix} = [B^T] \begin{Bmatrix} u^i \\ \phi^i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} t_{ij} \\ m_{ij} \end{Bmatrix} = [D^T M^T] \begin{Bmatrix} e_{ij} \\ \phi_{i,j} \end{Bmatrix} \quad \#(5)$$

3-3 有限要素法

平衡方程式に対して重み付き残差法を適用し、部分積分を行うことで、式(6)が得られる。

$$I = \iiint R_i(u, \phi) dx dy dz \quad \#(6)$$

式(6)に部分積分を適用することで次式になる。

$$\iiint [B^T]^T [D^T M^T] [B^T] dx dy dz \{u\} = [F, M] \quad \#(7)$$

4. 位相形態最適化

4-1 平均コンプライアンス最小化問題の定式化

目的関数として平均コンプライアンス C を採用することで構造物の位相形態最適化問題は次式で定式化される。

$$\left. \begin{aligned} \min_{\rho, u, \phi} [C(D'_{ijkl}(\rho), M'_{ijkl}(\rho))], C = l(u) + n(\phi), \\ \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V, 0 < \rho_{min} \end{aligned} \right\} \quad \#(8)$$

また、平衡方程式は次式のように与えられる。

$$a_{D'}(u, \tilde{u}) + a_{M'}(\phi, \tilde{\phi}) = l(\tilde{u}) + n(\tilde{\phi}) \quad \#(9)$$

ここで、 l は伸びに関する外力仕事、 n は回転に関する外力仕事、 $a_{D'}$ は伸びに関する内部仮想仕事、 $a_{M'}$ は回転に関する内部仮想仕事を示す。

4-2 修正 SIMP 法

SIMP 法とは、材料の剛性を密度 ρ のべき乗で表現することで、剛性と密度を関連付け、中間密度にペナルティを与えながら材料分布を更新し、設計領域内に最適な位相を得る方法の一つである。本研究では、伸び剛性 D' と回転剛性 M' を個別にペナルティ化する修正 SIMP 法を用いる。

$$\begin{cases} D'_{ijkl} = \rho(x)^p D^0_{ijkl} \\ M'_{ijkl} = \rho(x)^q M^0_{ijkl} \end{cases} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad \#(10)$$

ここで、 p, q はそれぞれの剛性に関するペナルティで、密度分布の二極化に寄与する。

5. 意匠デザインとプロセスとその適応

5-1 設計領域の定義

寸法は図1に示す通りである。材料定数はヤング率 $E = 1[\text{Pa}]$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 弾性定数 $\alpha = 1.0 \times 10^{-6} [\text{N}], \beta = 5.0 \times 10^{-7} [\text{N}], \gamma = 1.0 \times 10^{-6} [\text{N}]$ と設定した。さらに、適合度 $N = 0.8$, 体積制約5%として位相形態最適化を行う。境界条件は両端を完全固定とし、曲げ荷重($F_y = -4.0 \times 10^{-6} [\text{N}]$), ねじりモーメント($M_x = -5.0 \times 10^{-8} [\text{Nm}]$)を加える。

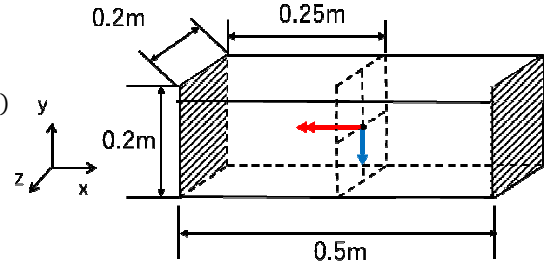


Fig. 1 Design region

5-2 マイクロポーラ材料としての最適構造

位相形態最適化を行った結果を図2に示す。なお、図2では密度が0.01以上の要素のみを表示している。結果として完全に対称な構造は得られず、多数の細いはり部材からなる構造が形成された。これは、曲げ荷重と同一方向に作用するねじりモーメントの影響により、当該側面に材料が偏在したためと考えられる。また、本解析では外力として曲げ荷重およびねじりモーメントのみを考慮しているため、実際の設計に適用する際には自重等を考慮した位相形態最適化を行う必要がある。

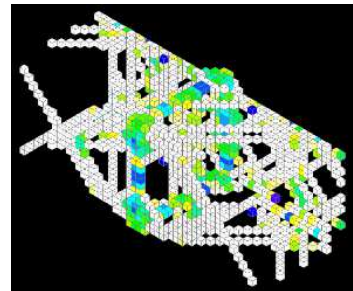


Fig. 2 Optimum structure

5-3 最適構造から CAD データへの変換

本節では5-2節で得られた最適構造をCADデータに変換する。得られた構造は完全に対称な構造ではなかったため、モーメントが反転した場合や、意匠性・再現性を重視し、はり側面を1種類に統一し、中心はりを対称化したものを最適構造としてCADデータに変換した。CADデータに変換する理由として、図2に示した密度分布のままでは強度解析が行えないためである。また、断面形状の変更が容易であることも理由の一つである。なおCADソフトはSolidWorksを使用した。CADデータに変換したものを図3に示す。

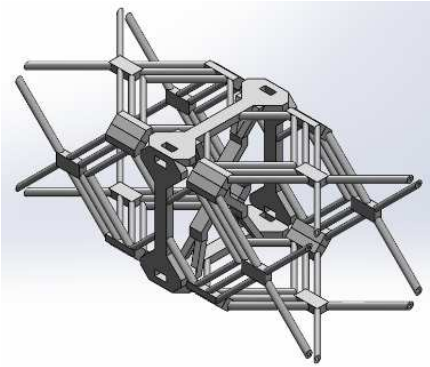


Fig. 3 The model converted into CADdata

5-4 断面形状の決定

5-2 節の図 2 はマイクロポーラ材料としての最適構造であり、通常材料でそのまま再現することは適切ではない。なお、通常材料は SUS304 のステンレス鋼とした。本節では通常材料とマイクロポーラ材料の引張特性とねじり特性を一致させてマイクロポーラ材料を再現する。それぞれ引張特性は断面積、ねじり特性は断面二次極モーメントを一致させることによって表現する。断面二次極モーメントを一致させるにあたり、ねじり角と断面二次極モーメントの関係を用いる。比ねじり角を θ 、トルクを T 、横弾性係数を G 、断面二次極モーメントを I_p とするとねじり角と断面二次極モーメントの関係式は次式となる。

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \quad \#(11)$$

さらに、微小領域においてねじり角を変位によって近似する。通常材料およびマイクロポーラ材料のねじり角をそれぞれ φ 、 φ' とし、変位を δ 、 δ' とすると次式が成り立つ。

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\delta}{\delta'} \quad \#(12)$$

通常材料の変位、マイクロポーラ材料の変位は有限要素解析プログラムを用いて求めることができる。求めた変位の比が次式である。

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{4.104728 \times 10^{-4}}{3.019891 \times 10^{-4}} \approx 1.4 \quad \#(13)$$

断面積の一致の式と式(13)で求めた比を反映した断面二次極モーメントの一致の式がそれぞれ式(14)、式(15)である。また、円筒の寸法を図 4 に示す。

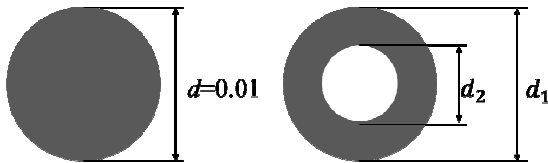


Fig. 4 Size of cylinder

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2) \quad \#(14)$$

$$1.4 \times \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4) \quad \#(15)$$

以上の 2 式を連立して解くことで円筒の寸法が求まる。その結果、円筒の寸法を $d_1 = 11.0[\text{mm}]$ 、 $d_2 = 4.47[\text{mm}]$ とした。

5-5 強度解析

5-3 節で作成したモデルに断面形状を変化したものについて強度解析を行った。ミーゼス応力を表示した結果を図 5 に示す。位相形態最適化の際より十分大きな荷重を加えた条件において、降伏強さは $2.068 \times 10^8 [\text{N/m}^2]$ 、最大応力は $9.778 \times 10^7 [\text{N/m}^2]$ である。最大応力は曲げ荷重の作用方向に対して垂直な側面に発生していることが確認された。安全率が 2.1 であり、一般に要求される基準値 2.0 を上回っていることから、十分な安全性を有していると評価できる。また、部材の角部にフィレットを設けることで応力集中の緩和および最大応力の低減が期待される。実際の構造物

では接合方法の違いにより構造強度が変化する可能性があるため、接合条件を踏まえた検討が必要である。

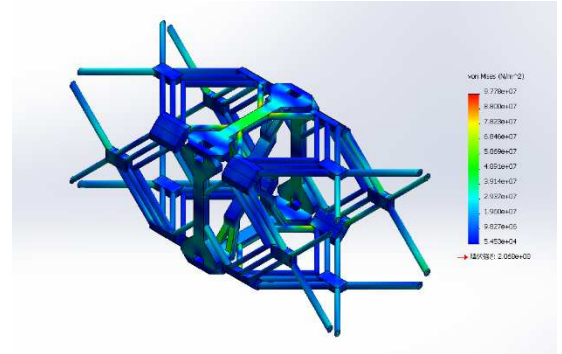


Fig. 5 Stress analysis

本研究では別モデルとして図 6 のような条件で解析を行った。平板の側面を完全固定し上面の中心部に集中荷重とねじりモーメントを加えたものである。FEM で得られた最適構造は、中心下部に十字形をした板状の構造、その四方から上下二股に分かれたはり、上部中心から十字板の四方へはりが伸びたような構造を形成した。CAD データへの変換では、板状部分の断面形状をハニカムサンドイッチパネルに、はりの正方形断面を H 型鋼断面に変更した。断面形状を変更することで通常材料の再現をした。

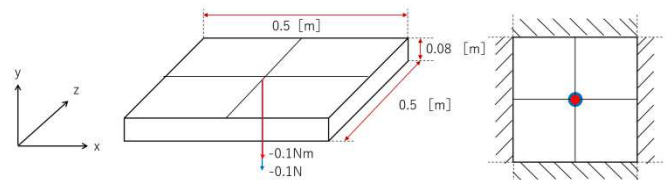


Fig.6 Design region 2

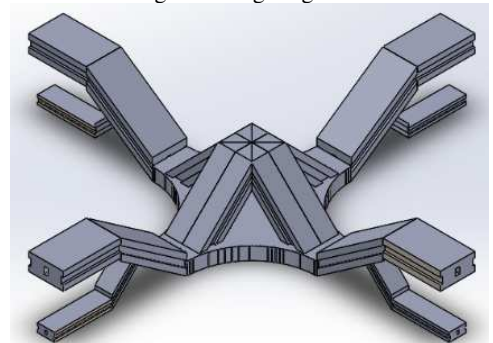


Fig.7 The model 2

6. 結言

- 通常材料を用いて、マイクロポーラ材料の変形特性を再現するプロセスを確立した。
- 最適構造を CAD モデルへ変換する際に、完全に対称でない構造の意匠性を考慮した再現方法について検討が必要である。
- 実際の設計においては、角部形状や具体的な接合方法を考慮する必要がある。

マイクロポーラ材料の最適構造に基づく 意匠デザインへの応用

工学部工学科機械工学コース 4 回生

緒言

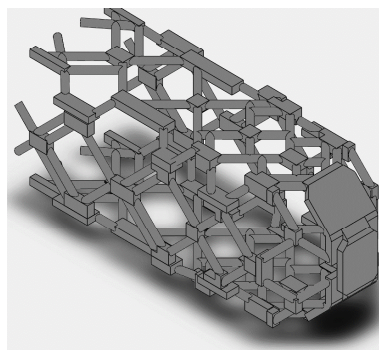
研究背景

マイクロポーラ材料

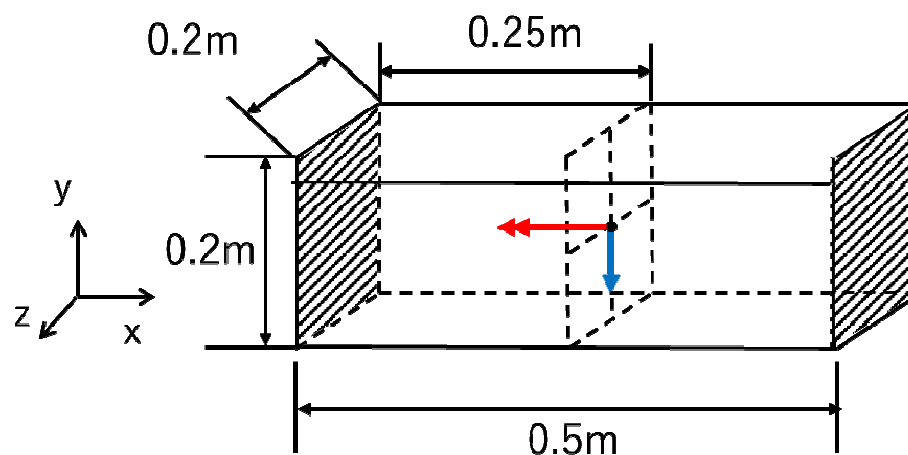
微細な内部構造を持ち、通常材料と比べ曲げ剛性、ねじり剛性などが異なる。最適構造はマイクロポーラ材料特有の弾性定数 α , β , γ の取り方によってデザイン性の高い構造が得られる



マイクロポーラ材料のデザイン性の高い最適構造を通常材料で再現し、剛性特性を一致させることで、**意匠性・高剛性**を持つ構造が期待される。先行研究で、片持はりの先端にねじり荷重が加わっている場合のマイクロポーラ材料の特性を通常材料で再現している。



本研究では、はり状モデルに曲げ荷重とねじりモーメントが加わっているマイクロポーラ材料の特性を通常材料で再現



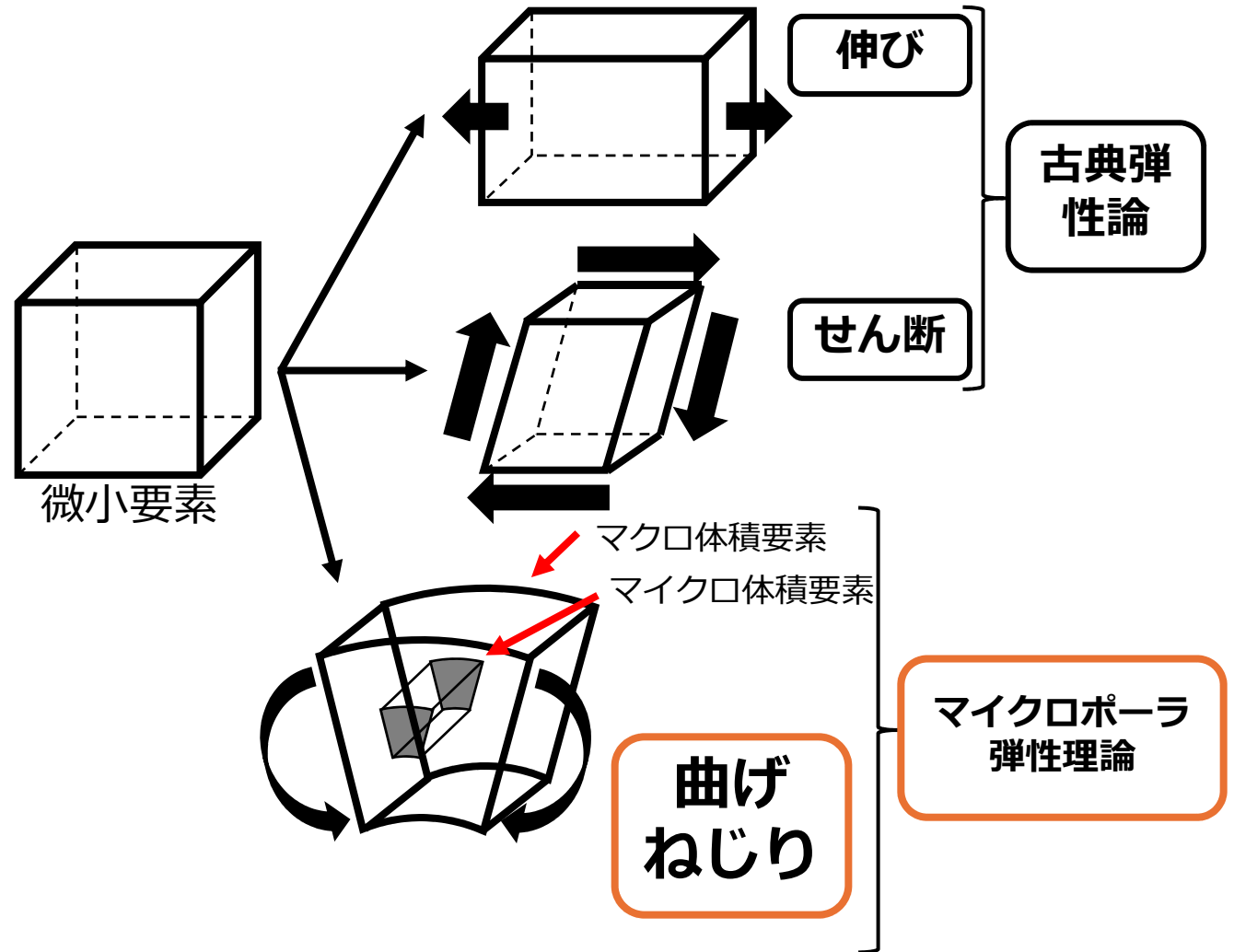
マイクロポーラ弾性理論について

マイクロポーラ弾性理論

材料の物体点に対して変位の自由度に加え、マイクロ回転と呼ばれる微細要素の回転の自由度を加えたもの。

マイクロポーラ材料

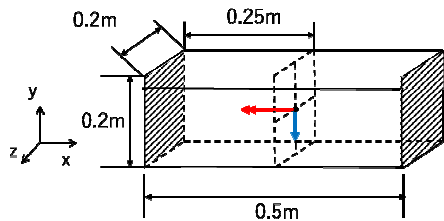
骨, コンクリート
骨のヤング率: 10~30[GPa]



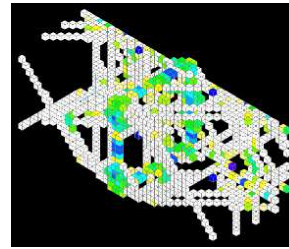
意匠デザインへの応用プロセス

マイクロポーラ材料

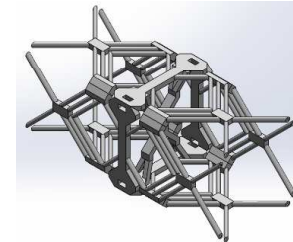
1. 設計領域の定義



2. 最適構造

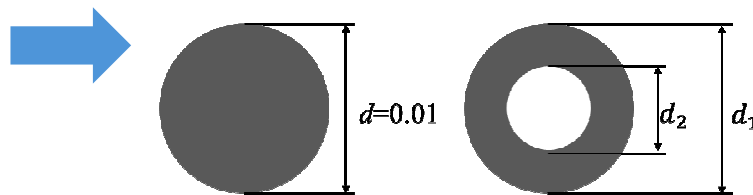


3. CADデータへの変換

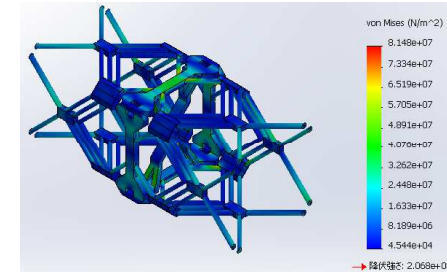


通常材料

4. 断面形状の決定

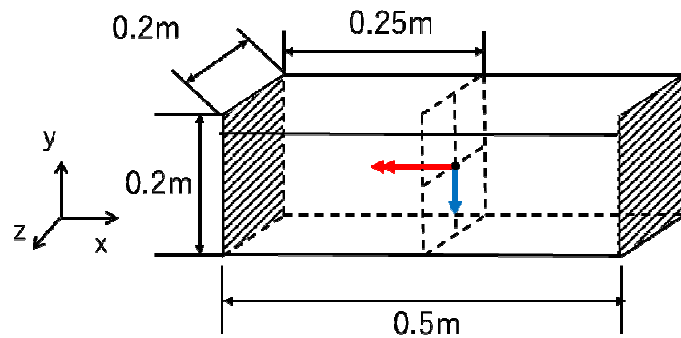


5. 構造物の作製, 強度解析



設計領域の定義と最適構造

1. 設計領域の定義

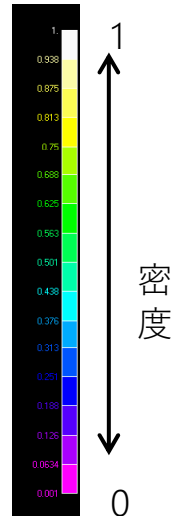
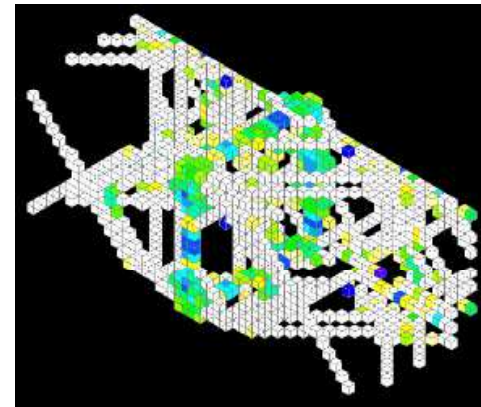


位相形態最適化

曲げ荷重 4.0×10^{-6} [N]
 ねじりモーメント 5.0×10^{-8} [Nm]
 両端固定

※ねじりについては側面の中央断面部分のすべての節点に荷重をかけている

2. 最適構造

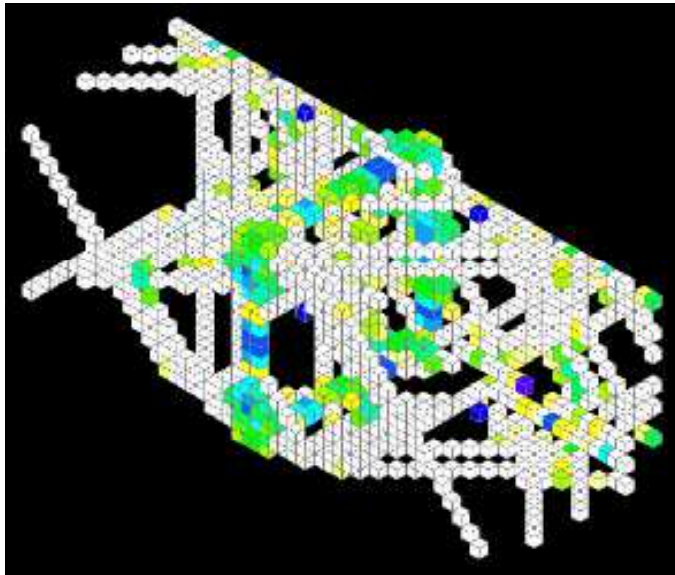


解析条件

ヤング率 E [Pa]	1	弾性定数 α [N]	1.0×10^{-6}
ポアソン比 ν	0.3	弾性定数 β [N]	5.0×10^{-7}
体積制約 [%]	5	弾性定数 γ [N]	1.0×10^{-6}
適合度 N	0.8		

3.CADデータへの変換

最適構造



問題点

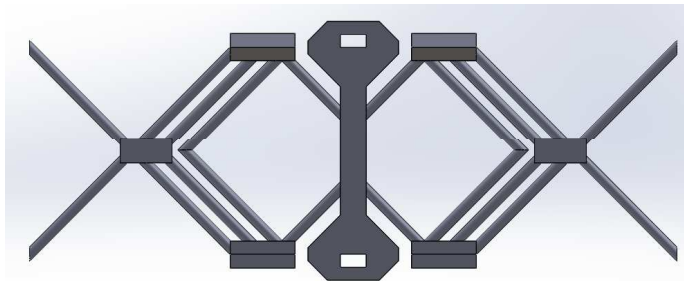
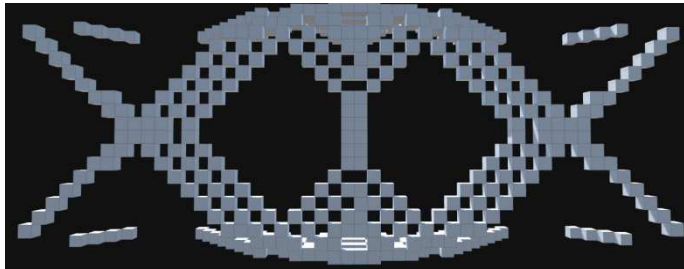
- マイクロポーラ材料の最適構造であり, 通常材料でそのまま構築できない.
- 構造しか表示できないので強度解析が行えない.

解決方法

- 通常材料でマイクロポーラ材料の変形特性を断面形状を変更して通常材料で疑似的に再現する.
- CADデータで再現する.

3.CADデータへの変換（2）

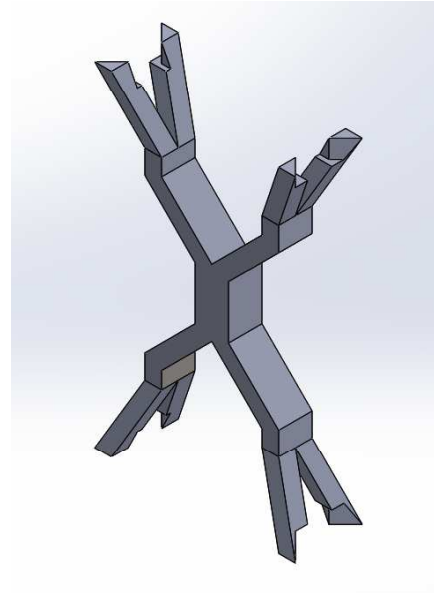
側面



側面を統一



中心はり



対称化

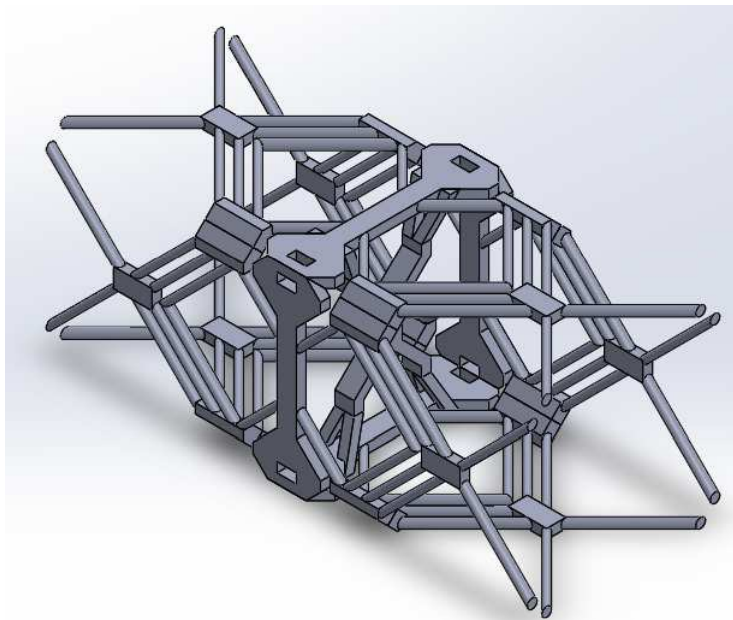


意匠性, 再現性
などを考慮

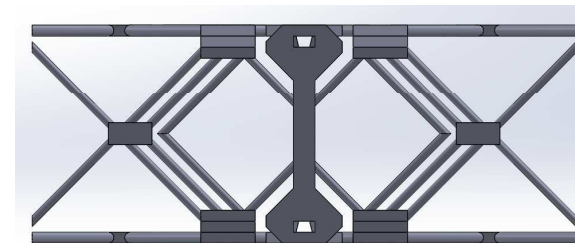
モデルを作成

3.CADデータへの変換（3）

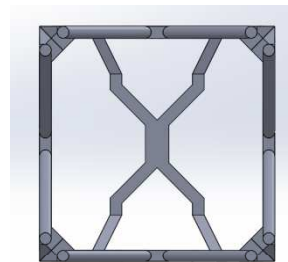
3.CADデータへの変換



俯瞰図

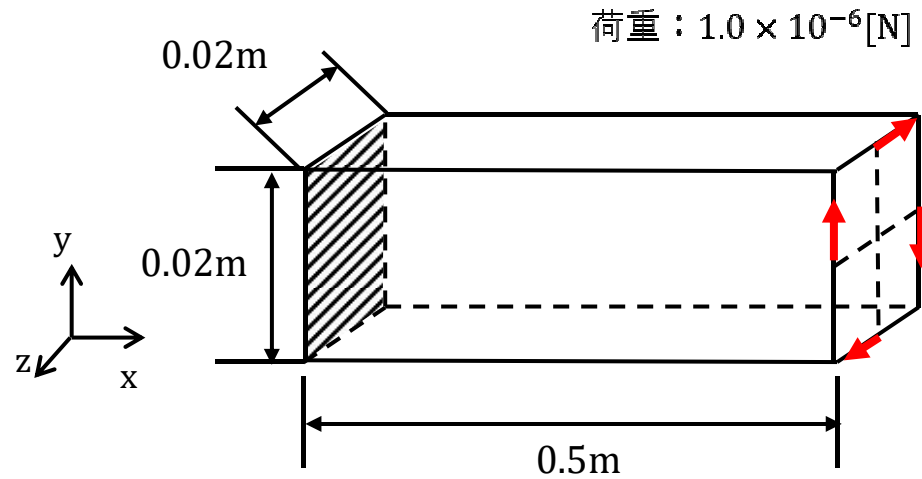


x-y平面図



y-z平面図

4. 断面形状の決定



通常材料

体積制約 [%]	100.0
適合度 N	0
曲げ剛性 α [N]	0
曲げ剛性 β [N]	0
曲げ剛性 γ [N]	1.00×10^{-20}

マイクロポーラ材料

体積制約 [%]	100.0
適合度 N	0.8
曲げ剛性 α [N]	1.00×10^{-6}
曲げ剛性 β [N]	5.00×10^{-7}
曲げ剛性 γ [N]	1.00×10^{-6}

断面二次極モーメントを一致させるにあたって,

$$\theta = \frac{T}{GI_p}$$

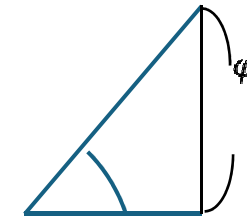
θ : 比ねじり角, T : トルク, G : 横弾性係数, I_p : 断面二次極モーメント

よって, 通常材料とマイクロポーラ材料のねじり角を求めたい.

微小領域において,

ねじり角の比 \doteq 変位の比 と近似

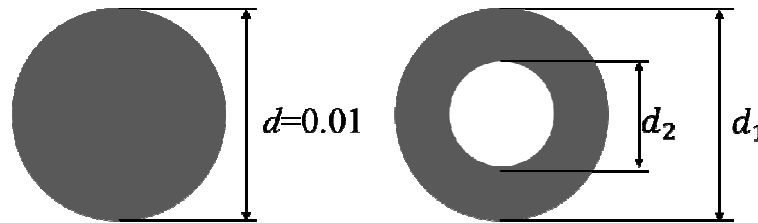
$$\frac{\varphi}{\varphi'} \doteq \frac{\delta}{\delta'}$$



φ : 通常材料のねじり角, φ' : マイクロポーラ材料のねじり角
 δ : 通常材料の変位, δ' : マイクロポーラ材料の変位

通常材料の変位 : δ $4.104728 \times 10^{-4} [\text{m}]$
 マイクロポーラ材料の変位 : δ' $3.019891 \times 10^{-4} [\text{m}]$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{4.104728 \times 10^{-4} [\text{m}]}{3.019891 \times 10^{-4} [\text{m}]} = 1.359231 \approx 1.4$$



断面積の一致

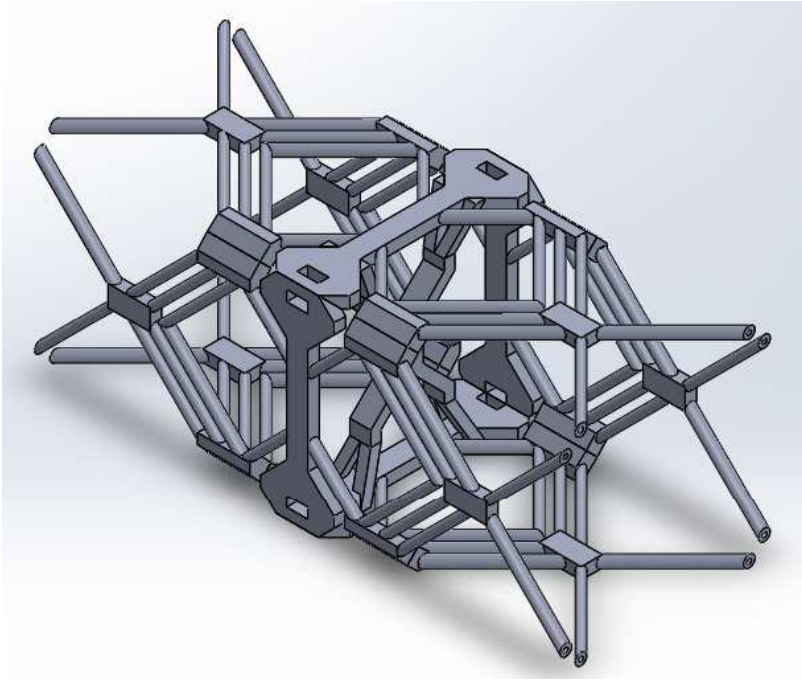
$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2)$$

断面二次極モーメントの一致

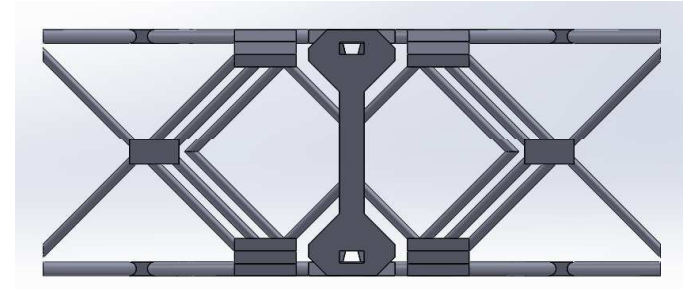
$$1.4 \times \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4)$$

$$d_1 = 11.0 [\text{mm}], \quad d_2 = 4.47 [\text{mm}]$$

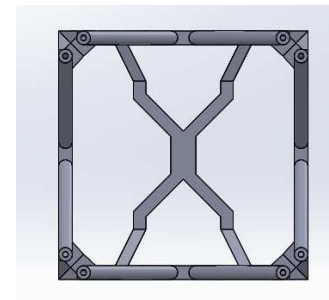
断面形状の適応



俯瞰図



x-y平面図



y-z平面図

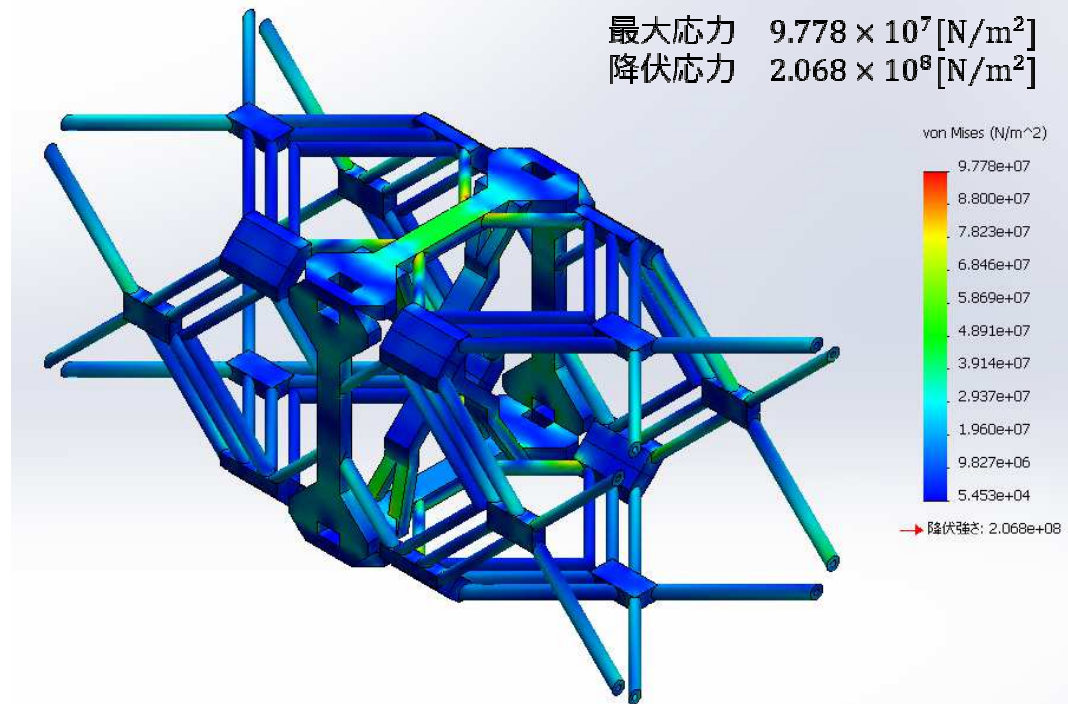
強度解析

5. 強度解析

安全率 : 2.1

材料 : SUS304

ヤング率 E [GPa]	193
剛性率 G [GPa]	74
ポアソン比	0.3

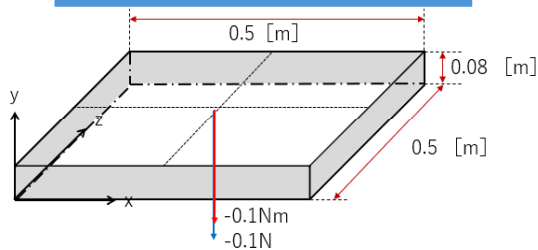


曲げ荷重 600 [N]
ねじりモーメント 60 [Nm]

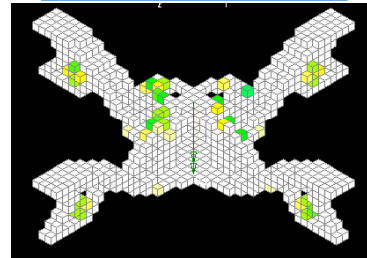
意匠デザインへの応用プロセス2

マイクロポーラ材料

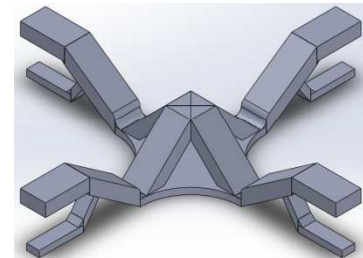
1. 設計領域の定義



2. 最適構造

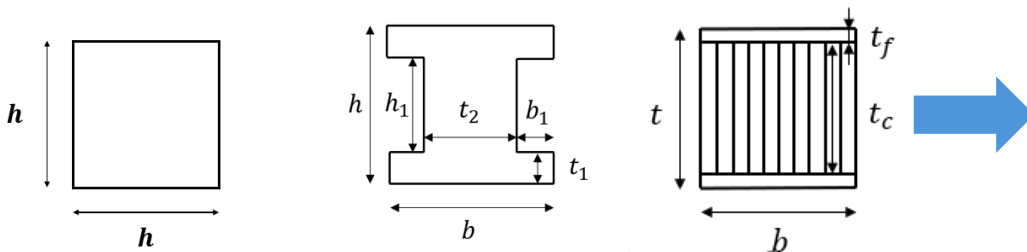


3. CADデータへの変換

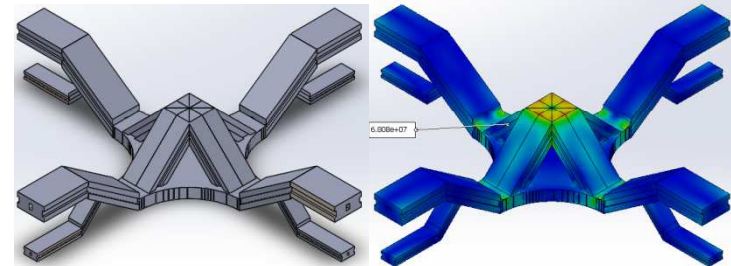


通常材料

4. 断面形状の決定



5. 構造物の作製, 強度解析



結言

- マイクロポーラ材料の最適構造を意匠デザインへの反映させるための足掛かりとして、通常材料を用いて、マイクロポーラ材料の変形特性を再現するためのプロセスを確立できた。
- 最適構造をCADモデルにするにあたって完全に対称でない構造を意匠性を考え再現する方法について考える必要がある。
- 実際の設計においては、角部形状や具体的な接合方法を考慮する必要がある。