令和 7(2025)年度卒業研究

微分方程式の研究

～SIRS モデルを用いた感染症の解析～

(指導教員　柳　重則)

2320090A　　河野　翔

2320128C　　髙橋　大地

研究内容

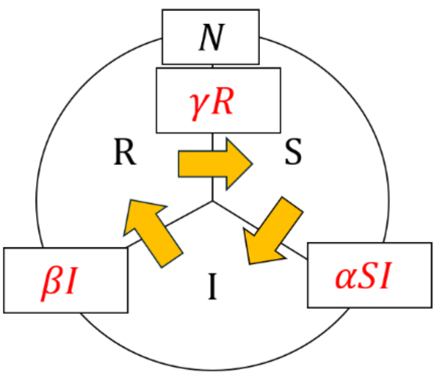
　本稿では，集団に感染症が広まる様子について，一度感染して治癒した者であっても再び感染してしまう場合を考慮に入れて表した微分方程式を導き，その感染症において感染者数と未感染者数がどのように変化するのかを調べる。

〇仮定
今回扱う現象について，次の仮定のもとで考える。
・病気から治癒した者は，一定時間経過するとその病気に対する免疫を失う。
・潜伏期間は無視できるほど短い。

〇集団内の分類
人々を次の 3 つのクラスに分類する。
　S：病気にかかりうる人達のクラス
　I：感染者のクラス
　R：除外者のクラス

〇規則
感染症の伝染は，次の規則に従うものと仮定する。
規則 1 ：人口はある固定レベルNに保たれる。
規則 2 ：病気にかかりうる人達の人口の変化率は, S の人数と I の人数の積に比例する。
規則 3 ：感染者のクラス I からは, I の大きさに比例する率でメンバーが減る。
規則 4 ：除外者のクラス R からは, R の大きさに比例する率でメンバーが減り，そのメンバーは病気にかかりうる人達のクラス S に戻る。

この 4 つの規則のイメージを図で表すと下のようになる。



○今回扱う微分方程式

$S(t)$, $I(t)$, $R(t)$を，時刻tにおけるクラス S, I, R のメンバーの人数を表すとする。
このとき，規則 1~4 より，以下の連立微分方程式が導かれる。

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \gamma R \ , \quad \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \ , \quad \frac{dR}{dt} = \beta I - \gamma R \qquad \cdots(1)$$

（α，β，$\gamma > 0$，α：感染率，β：除外率，γ：免疫失活率）

$t = 0$ のとき，$S(0) = S_0$，$I(0) = I_0$，$R(0) = R_0$とする。

(1)の 3 式を全て足し上げると，$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$となるため，

$S(t) + I(t) + R(t) =$ 定数 $= N$ である。（ただし，$N > 0$ とする）
これを$R(t) = N - S(t) - I(t)$と式変形し，(1)第 1 式に代入すると，

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \gamma(N - S - I) \ , \quad \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \qquad \cdots(2)$$

という連立微分方程式が得られる。これはS，Iだけに依存しRには依存しない連立微分方程式であり，これを解くことで$S(t)$，$I(t)$がわかり，$R(t) = N - S(t) - I(t)$より$R(t)$もわかる。
そのため本稿では(2)の連立微分方程式を扱う。

○平衡解を求める

(2)の平衡解(時間に依存しない(2)の解)は，$\frac{dS}{dt} = 0$ ，$\frac{dI}{dt} = 0$を解くことで求めることができる。

$$-\alpha SI + \gamma(N - S - I) = 0 \quad \cdots ① , \quad \alpha SI - \beta I = 0 \quad \cdots ②$$

②より，$(\alpha S - \beta)I = 0$となるため，$I = 0$ または$S = \frac{\beta}{\alpha}$である。

・$I = 0$ のとき
①に代入すると$\gamma(N - S) = 0$
$\gamma > 0$ より$S = N$

・$S = \frac{\beta}{\alpha}$のとき

①に代入すると

$$-\beta I + \gamma\left(N - \frac{\beta}{\alpha} - I\right) = 0$$

$$(\beta + \gamma)I = \gamma\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$\beta > 0$，$\gamma > 0$ より$\beta + \gamma > 0$ なので，$I = \frac{\gamma(\alpha N - \beta)}{\alpha(\beta+\gamma)}$

以上より，(2)の平衡解は$(S, I) = (N, 0), \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma(\alpha N - \beta)}{\alpha(\beta+\gamma)}\right)$である。

この 2 点をそれぞれ点 P$(N, 0)$，点 Q$\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma(\alpha N - \beta)}{\alpha(\beta+\gamma)}\right)$とする。

点 P は，$N > 0$ よりSI 平面においてS 軸上の正の部分にある。
点 Q は，SI 平面において

(i)$\alpha N - \beta < 0$，つまり$N < \frac{\beta}{\alpha}$のとき第 4 象限

(ii)$\alpha N - \beta > 0$，つまり$N > \frac{\beta}{\alpha}$のとき第 1 象限

にある。この 2 つの場合に分けて考える。

○第 1 象限から始まる(2)の全ての解は未来においても第 1 象限にとどまることを示す
任意の時刻$t(\geq 0)$について$S(t)$，$I(t)$，$R(t) > 0$ であることを示す。

ここで，次の定理を用いる

<u>定理</u>(軌道の存在と一意性)

連立微分方程式$\frac{dS}{dt} = f(S, I)$ ，$\frac{dI}{dt} = g(S, I)$について，関数$f(S, I)$，$g(S, I)$は，S，I について，

連続な偏導関数をもつとする。
このとき，$\mathbb{R}^2$内の全ての点(S, I)に対して，その点を通る軌道がただ一つ存在する。
特に，2 つの解の軌道が 1 点を共有するとき，2 つの軌道は一致する。

まず，$I(t) > 0$を示す。
$I \equiv 0$ は(2)第 2 式をみたす。

($\because$（左辺）$= \frac{d}{dt}0 = 0$ ，(右辺)$= \alpha S \times 0 - \beta \times 0 = 0$ ）

(2)第 1 式に代入すると，

$$\frac{dS}{dt} = \gamma(N - S)$$

これを変数分離法を用いて解く。

$\frac{1}{N-S}\frac{dS}{dt} = \gamma$（ただし，$S \neq N$ とする）

両辺をtで積分すると

$$\int \frac{1}{N-S} dS = \int \gamma dt$$

$-\log|N-S| = \gamma t + C$（ただし，$C$は積分定数である）

$N-S = \pm e^{-\gamma t - C} = Ce^{-\gamma t}$（ただし，$\pm e^{-C}$を改めて$C$とおいた）

よって，$S = N - Ce^{-\gamma t}$となる。

$t = 0$のとき，$S_0 = N - Ce^{-\gamma \times 0} = N - C$となるため，$C = N - S_0$

従って，$S(t) = N - (N - S_0)e^{-\gamma t}$となる。

このとき，S軸上の軌道は，

$S_0 < N$のとき，半直線$-\infty < S(t) < N$

$S_0 > N$のとき，半直線$N < S(t) < \infty$となる。

これらと平衡点$\mathrm{P}(N, 0)$より，S軸は(2)の 3 つの互いに交わらない軌道の和集合である。

軌道の存在と一意性より，$I_0 > 0$ならば，任意の時刻$t \geq 0$ において$I(t) > 0$である。

次に，$R(t) > 0$を示す。

背理法で示す。つまり，$R(t)$が$t = t^*$で初めて$R(t^*) = 0$となると仮定する。

(1)第 3 式より，

$\frac{dR}{dt}(t^*) = \beta I(t^*) - \gamma R(t^*) = \beta I(t^*) > 0$（$\because \forall t \geq 0\ \ I(t) > 0$）

一方，$t < t^*$のとき，仮定より$R(t) > 0$であり，$\frac{R(t) - R(t^*)}{t - t^*} < 0$となる。

（$\because\ R(t) - R(t^*) = R(t) > 0$ ，$t - t^* < 0$）

よって，$\lim_{t \to t^* - 0} \frac{R(t) - R(t^*)}{t - t^*} = \frac{dR}{dt}(t^*) \leq 0$である。

これは，$\frac{dR}{dt}(t^*) > 0$であることに矛盾。

従って，$R_0 > 0$ならば，任意の時刻$t \geq 0$において$R(t) > 0$である。

最後に，$S(t) > 0$を示す。

背理法で示す。つまり，$S(t)$が$t = t^*$で初めて$S(t^*) = 0$となると仮定する。

(1)第 1 式より，

$\frac{dS}{dt}(t^*) = -\alpha S(t^*) I(t^*) + \gamma R(t^*) = \gamma R(t^*) > 0$（$\because \forall t \geq 0\ \ R(t) > 0$）

一方，$t < t^*$のとき，仮定より$S(t) > 0$であり，$\frac{S(t) - S(t^*)}{t - t^*} < 0$となる。

（$\because\ S(t) - S(t^*) = S(t) > 0$ ，$t - t^* < 0$）

よって，$\lim_{t\to t^*-0}\frac{S(t)-S(t^*)}{t-t^*}=\frac{dS}{dt}(t^*)\leq 0$である。

これは，$\frac{dS}{dt}(t^*)>0$であることに矛盾。

従って，$S_0>0$ならば，任意の時刻$t\geq 0$ において$S(t)>0$である。

以上より，第 1 象限から始まる(2)の全ての解は未来においても第 1 象限にとどまることを示すことができた。

〇連立微分方程式(2)の解析

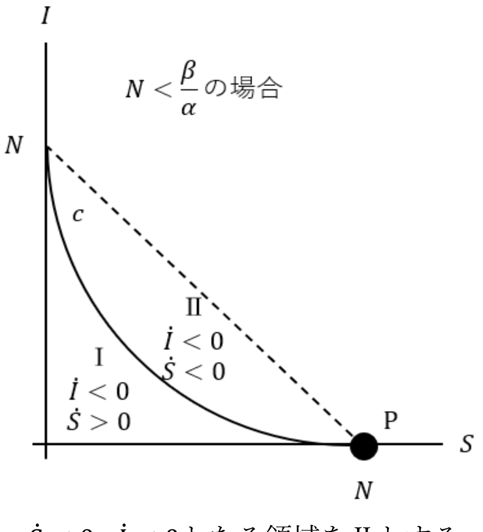
(i)$N<\frac{\beta}{\alpha}$のとき

SI 平面の第 1 象限を$\frac{dS}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$の符号で分割する。

曲線c ：$\frac{dS}{dt}=-\alpha SI+\gamma(N-S-I)=0$

直線l ：$\frac{dI}{dt}=\alpha SI-\beta I=0$

とする。
また，第 1 象限に存在する平衡点は P$(N,0)$のみである。
このとき，第 1 象限は次の図のようになる。



$\dot{S}>0$, $\dot{I}<0$となる領域をⅠ，$\dot{S}<0$, $\dot{I}<0$となる領域をⅡとする。

注 1：$\dot{S}=\frac{dS}{dt}$, $\dot{I}=\frac{dI}{dt}$を表す。

注 2：$S+I+R=N$ と$R>0$ より，$S+I<N$ である。

注 3：直線l は$I>0$ より$S=\frac{\beta}{\alpha}$であり，今の場合$N<\frac{\beta}{\alpha}$であるため省略している。

ここでは，次の定理 1 を示す。

定理 1

$N<\frac{\beta}{\alpha}$のとき，$S_0>0$，$I_0>0$をみたす(2)の全ての解$S(t)$，$I(t)$は，最終的に平衡点 P$(N,0)$に近づく。

定理 1 を示すために，次の 2 つの補題を示す。

補題 1
時刻$t=0$ において領域Ⅰから始まる(2)の全ての解$S(t)$，$I(t)$は，未来において領域Ⅰにとどまり，最終的に平衡点 P に近づく。

補題 2
時刻$t=0$ において領域Ⅱから始まる(2)の全ての解$S(t)$，$I(t)$は，未来においてこの領域を離れる。

これらを示すために次の 2 つの補題を用意する。

補題 A
$f(t)$を，ある定数a に対して，$t\geq 0$ において$f(t)\leq a(\geq a)$をみたす単調増加(減少)関数とする。このとき，$t\to\infty$ とするとき，$f(t)$は極限値をもつ。

補題 B

連立微分方程式$\frac{dS}{dt}=f(S,I)$ ，$\frac{dI}{dt}=g(S,I)$ …($*$)の解(S,I)が，$t\to\infty$ のとき，$(S,I)\to(\xi,\eta)$に近づくとする。このとき，(ξ,η)は($*$)の平衡点である。

(補題 1 の証明)
①領域Ⅰにとどまること
②平衡点 P に近づくこと
を示す。

①領域Ⅰにとどまること
背理法で示す。つまり，$t = t^*$で(2)のある解が領域Ⅰから初めて外れるとする。
このとき，S軸，I軸を越えることはできないため，曲線cを横切らなければならない。

よって，$\frac{dS}{dt}(t^*) = 0$である。

(2)第1式の両辺をtについて微分し，$t = t^*$とすると，

$$\frac{d^2S}{dt^2}(t^*) = -\alpha\left\{\frac{dS}{dt}(t^*)I(t^*) + S(t^*)\frac{dI}{dt}(t^*)\right\} + \gamma\left\{-\frac{dS}{dt}(t^*) - \frac{dI}{dt}(t^*)\right\}$$

$$= -\alpha S(t^*)\frac{dI}{dt}(t^*) - \gamma\frac{dI}{dt}(t^*)$$

$$= -\{\alpha S(t^*) + \gamma\}\frac{dI}{dt}(t^*) > 0$$

($\because\ \alpha S + \gamma > 0$，$\frac{dI}{dt} < 0$)

よって，$S(t)$は$t = t^*$で極小値をもつ。

しかし，これは$t < t^*$において$\frac{dS}{dt} > 0$であることに矛盾。

従って，時刻$t = 0$において領域Ⅰから始まる(2)の全ての解は領域Ⅰにとどまる。■

②平衡点Pに近づくこと
(2)の解は領域Ⅰにとどまり続けるため，$t \geq 0$ において，

$\frac{dS}{dt} > 0$ より$S(t)$は単調増加関数,

$\frac{dI}{dt} < 0$より$I(t)$は単調減少関数であり，

$S(t) < N$，$I(t) > 0$であるため，補題Aより$S(t)$，$I(t)$はそれぞれ極限値をもち，補題Bより，その値は(2)の平衡点となる。
よって，時刻$t = 0$において領域Ⅰから始まる(2)の全ての解は平衡点Pに近づく。■

(補題2の証明)
背理法で示す。つまり, (2)のある解が領域Ⅱにとどまると仮定する。

このとき，$\frac{dS}{dt} < 0$，$\frac{dI}{dt} < 0$より，$S(t)$，$I(t)$はどちらも単調減少関数であり，

$S(t) > 0$，$I(t) > 0$であるため，補題Aより$S(t)$，$I(t)$はそれぞれ極限値をもち，補題Bより，その値は(2)の平衡点となる。
しかし，$S(t)$が単調減少関数であることから平衡点Pに近づくことはできないため矛盾。

よって，時刻$t = 0$において領域Ⅱから始まる(2)の全ての解は未来においてこの領域を離れる。■

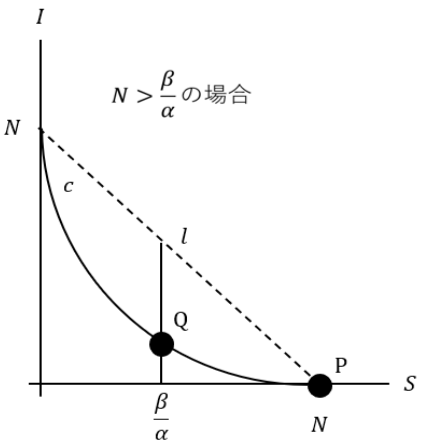
・<u>定理 1 の証明</u>
補題 1 より，領域Ⅰから始まる(2)の全ての解は，未来においてこの領域にとどまり，最終的に平衡点 P に近づく。
補題 2 より，領域Ⅱから始まる(2)の全ての解は，未来においてこの領域を離れる。このとき，$S(t)$，$I(t)$はともに単調減少関数であることから(2)のすべての解は領域Ⅰに行くため，補題 1 より最終的に平衡点 P に近づく。

つまり，$N < \frac{\beta}{\alpha}$のとき，第 1 象限から始まる(2)の全ての解は最終的に平衡点 P に近づく。■

(ii)$N > \frac{\beta}{\alpha}$のとき

第 1 象限に存在する平衡点は $\mathrm{P}(N, 0)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma(\alpha N - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)}\right)$の 2 つである。

このとき，第 1 象限は次の図のようになる。



ここでは，次の定理 2 を示す。

定理 2

$N > \frac{\beta}{\alpha}$のとき，$S_0 > 0$，$I_0 > 0$をみたす(2)の全ての解$S(t)$，$I(t)$は，最終的に平衡点 $\mathrm{Q}\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma(\alpha N - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)}\right)$に近づく。

この定理も 1 つ目の場合と同様に相平面解析を用いて示すことは可能であるが，内容が煩

雑となってしまうため，別の証明方法を与える。
そのために，いくつか定義や定理などを導入する。

(S^*, I^*)を，連立微分方程式$\frac{dS}{dt} = f(S, I)$ ，$\frac{dI}{dt} = g(S, I)$ ⋯(＊)の平衡点とする。

<u>定義</u>(平衡点の局所的安定性)
・(S^*, I^*)は局所的安定である
$\underset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ s.t.\ \forall \big(S(t), I(t)\big)$：(＊)の解
$|(S_0, I_0) - (S^*, I^*)| < \delta \ \Rightarrow\ \forall t \geq 0\ \left|\big(S(t), I(t)\big) - (S^*, I^*)\right| < \varepsilon$

・(S^*, I^*)は局所的漸近安定である
$\underset{def}{\Leftrightarrow}(S^*, I^*)$は安定
かつ
$\exists \delta' > 0\ s.t.\ \forall \big(S(t), I(t)\big)$：(＊)の解
$|(S_0, I_0) - (S^*, I^*)| < \delta' \ \Rightarrow\ \lim_{t \to \infty}\left|\big(S(t), I(t)\big) - (S^*, I^*)\right| = 0$

また，(S^*, I^*)が安定でないとき，(S^*, I^*)は不安定であるという。

次に定理を 3 つほど導入する。

<u>定理 A</u>(平衡点の安定性)

$$J(S^*, I^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(S, I)}{\partial S} & \dfrac{\partial f(S, I)}{\partial I} \\ \dfrac{\partial g(S, I)}{\partial S} & \dfrac{\partial g(S, I)}{\partial I} \end{pmatrix}$$

を考える。(これをヤコビ行列という。)
$J(S^*, I^*)$の全ての固有値が負の実部をもつとき，平衡点(S^*, I^*)は局所的漸近安定である。

<u>定理 B</u>(ポアンカレ・ベンディクソンの定理)
連立微分方程式(＊)の解$S(t)$，$I(t)$が，(＊)の平衡点を含まない有界な領域にとどまり続けるとする。
このとき，それ自身が周期軌道となるか，ある単純閉曲線に螺旋状に近づき，その単純閉曲線自身も(＊)の周期軌道である。

注：つまり，条件を満たすとき，有界な領域内で少なくとも 1 つは周期軌道をもつ。

定理 C

単連結領域D内でC^1級関数$f(S,I)$，$g(S,I)$及び$B(S,I)$があって，

$\frac{\partial(Bf)}{\partial S}+\frac{\partial(Bg)}{\partial I}\neq 0$　（$\forall(S,I)\in D$）

をみたすならば，連立微分方程式（$*$）はD内にすっかり含まれるような周期解をもたない。

定理 C のみ証明を与える。

(証明)

背理法で示す。つまり，領域D内にすっかり含まれるような（$*$）の周期解$S(t)$，$I(t)$が存在するとする。

この周期軌道をC，周期をTとし，Cで囲まれた領域をAとする。

このとき，平面におけるグリーンの定理より，次の等式が成り立つ。

$$\iint_A\left(\frac{\partial(Bf)}{\partial S}+\frac{\partial(Bg)}{\partial I}\right)dSdI=\int_C BfdI-BgdS$$

このとき，

(左辺)$\neq 0$（$\because\ \forall(S,I)\in D\ \ \frac{\partial(Bf)}{\partial S}+\frac{\partial(Bg)}{\partial I}\neq 0$）

(右辺)

$=\int_0^T B\big(S(t),I(t)\big)f\big(S(t),I(t)\big)\frac{dI}{dt}dt-\int_0^T B\big(S(t),I(t)\big)g\big(S(t),I(t)\big)\frac{dS}{dt}dt$

$=\int_0^T B\big(S(t),I(t)\big)\frac{dS}{dt}\frac{dI}{dt}dt-\int_0^T B\big(S(t),I(t)\big)\frac{dI}{dt}\frac{dS}{dt}dt$

($\because$ 連立微分方程式（$*$）より，$f=\frac{dS}{dt}$，$g=\frac{dI}{dt}$)

$=0$

よって矛盾が生じた。■

また，定理 2 を示すためにある命題を考える。

命題

(2)は領域$D=\{(S,I): S>0,\ I>0,\ S+I<N\}$内で周期解をもたない。

(証明)

$$f(S,I)=\frac{dS}{dt}=-\alpha SI+\gamma(N-S-I)$$

$$g(S,I)=\frac{dI}{dt}=\alpha SI-\beta I$$

$$B(S,I)=\frac{1}{SI}$$

とする。さらに,

$$F(S,I)=Bf=-\alpha+\frac{\gamma(N-S-I)}{SI}$$

$$G(S,I)=Bg=\alpha-\frac{\beta}{S}$$

とすると,

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial S}+\frac{\partial(Bg)}{\partial I}=\frac{\partial F}{\partial S}+\frac{\partial G}{\partial I}=-\frac{\gamma}{S^2 I}(N-I)<0$$

よって，定理 C より, (2)は領域D 内にすっかり含まれるような周期解をもたない。■

さらに，平衡点 Q の局所的安定性を考える。

点 Q$\left(\frac{\beta}{\alpha},\frac{\gamma(\alpha N-\beta)}{\alpha(\beta+\gamma)}\right)$を$(S^*,I^*)$とおく。

$\frac{dS}{dt}=-\alpha SI+\gamma(N-S-I)$ ，$\frac{dI}{dt}=\alpha SI-\beta I$

より，ヤコビ行列$J(S,I)$は,

$$J(S,I)=\begin{pmatrix}-\alpha I-\gamma & -\alpha S-\gamma\\ \alpha I & \alpha S-\beta\end{pmatrix}$$

となる。

よって，$J(S^*,I^*)=\begin{pmatrix}-\alpha I^*-\gamma & -\alpha S^*-\gamma\\ \alpha I^* & \alpha S^*-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha I^*-\gamma & -\beta-\gamma\\ \alpha I^* & 0\end{pmatrix}$ $(\because S^*=\frac{\beta}{\alpha})$

$$\det\left(\lambda E-J(S^*,I^*)\right)=\begin{vmatrix}\lambda+(\alpha I^*+\gamma) & \beta+\gamma\\ -\alpha I^* & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+(\alpha I^*+\gamma)\lambda+\alpha I^*(\beta+\gamma)$$

$J(S^*,I^*)$の固有値をそれぞれλ_1，λ_2とする。

・λ_1，$\lambda_2\in\mathbb{R}$ のとき

2 次方程式の解と係数の関係より,

$\lambda_1+\lambda_2=-(\alpha I^*+\gamma)<0$ ，$\lambda_1\lambda_2=\alpha I^*(\beta+\gamma)>0$

$(\because N>\frac{\beta}{\alpha}$のとき，$I^*>0)$

よって，λ_1，$\lambda_2<0$

・λ_1，$\lambda_2 \notin \mathbb{R}$ のとき

$Re\lambda_j = -\frac{\alpha I^* + \gamma}{2} < 0$（$j = 1,2$）

以上より，$J(S^*, I^*)$の全ての固有値が負の実部をもつため，定理 A より，

平衡点 Q$\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma(\alpha N - \beta)}{\alpha(\beta+\gamma)}\right)$は局所的漸近安定である。

つまり，定義より，点 Q のδ近傍から始まる(2)の全ての解は平衡点 Q に近づく。

・<u>定理 2 の証明</u>
背理法で示す。つまり，最終的に平衡点 Q に近づかないような(2)の解$S(t)$，$I(t)$が存在すると仮定する。

これは，ある(2)の解$S(t)$，$I(t)$が存在し，$\lim_{t\to\infty}\big(S(t), I(t)\big) = (S^*, I^*)$が成り立たないことを意味する。
このとき，点 Q は局所的漸近安定なので，
$\forall t \geq 0 \ \left|\big(S(t), I(t)\big) - (S^*, I^*)\right| \geq \delta$ が成り立つ。
($\because$ 一瞬でも(2)の解$S(t)$，$I(t)$が点 Q のδ近傍に入ってしまうと，点 Q の局所的漸近安定性から$\lim_{t\to\infty}\big(S(t), I(t)\big) = (S^*, I^*)$が成り立ってしまう）

よって，(2)の解は，点 Q のδ近傍の中に入れず，領域Dの外にも出られないため，領域Dから点 Q のδ近傍を除いた平衡点を含まない有界な領域にとどまり続ける。
従って，定理 B より，領域D内に少なくとも 1 つは周期解をもつ。
しかし，命題より，領域D内で周期解をもたないため矛盾。

ゆえに，$N > \frac{\beta}{\alpha}$のとき，第 1 象限から始まる(2)の全ての解は最終的に平衡点 Q に近づく。■

〇考察

(i)$N < \frac{\beta}{\alpha}$のとき

つまり，
・全人口が少ない
・病気に感染しにくい
・病気が治りやすい
などの場合は，最終的には全員が病気にかかりうる状態となる。

(ii)$N > \frac{\beta}{\alpha}$のとき

つまり，
・全人口が多い
・病気に感染しやすい
・病気が治りにくい
などの場合は，最終的には病気にかかりうる状態の人，病気にかかっている状態の人，病気が治り免疫を持った状態の人の人数の割合が一定数に保たれる。

また，場合分けにおいて免疫の失いやすさ(定数γ)が全く関係してこなかったのはとても興味深い事実であった。
しかし，今回調べたのは長期的な解の振る舞いであり，短期的(有限時間内について)な解の振る舞いは十分調べられていないため，今後の課題として考えていきたい。

参考文献

「微分方程式　下　その数学と応用」
　M.ブラウン　著　一樂重雄/河原正治/河原雅子/一樂祥子　訳（丸善出版 2012）

「常微分方程式」
　入江昭二・垣田高夫共著（内田老鶴圃）

「微分方程式の基礎」
　笠原晧司著（朝倉書店）

「数理生態学」
　寺本英著（朝倉書店）

「力学系入門　原書　第 3 版　- 微分方程式からカオスまで -」
　Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney　著
　桐本紳/三波篤郎/谷川清隆/辻井正人　訳（共立出版 2017）