（後期日程）

令和６年度　数　学

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，３ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。

5　解答用紙はすべて机の上に出しておくこと。机の中に入れてはいけません。

1

次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \boxed{(ア)}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\log 3x}{\log 2x} = \boxed{(イ)}$ である。

(2) $f(x) = 3\sin 2x + \tan x$ のとき，$f'(0) = \boxed{(ウ)}$ であり，
$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{(エ)}$ である。

(3) $\displaystyle\int_0^2 xe^{2x^2}\,dx = \boxed{(オ)}$ であり，$\displaystyle\int_0^2 x^3e^{2x^2}\,dx = \boxed{(カ)}$ である。

(4) 関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1| + 2$ は，$x = \boxed{(キ)}$ で最小となり，
$x = \boxed{(ク)}$ で極大となる。

(5) 1 円と 10 円の硬貨がそれぞれ 4 枚あり，これら 8 枚の硬貨を横 1 列に並べる。ただし，同じ金額の硬貨は区別しないものとする。このとき，少なくとも一方の金額の硬貨が 2 枚以上続く並べ方は全部で $\boxed{(ケ)}$ 通りある。また，左から 4 枚の硬貨の金額の合計を n 円とするとき，n が素数となる並べ方は全部で $\boxed{(コ)}$ 通りある。

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$

以下の問いに答えよ。

(1) $x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(i) $x \log x > x - 1$

(ii) $x^{\frac{x}{x-1}} > e$

(2) 複素数平面上に異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β)があり，複素数 α，β は等式 $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$ を満たすとする。

(i) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値をすべて求めよ。

(ii) △OAB は正三角形であることを証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ は公比が r の等比数列で，2 つの等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 6$$

を満たすとする。このとき，a_1 および r の値を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF がある。s, t を実数とし，点 P，Q は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

を満たすとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{f}$ とする。

以下の問いに答えよ。

(1) 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(i) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{f}$ の値は $\boxed{(ア)}$ である。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = k\vec{b} + \ell\vec{f}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = m\vec{b} + n\vec{f}$ と表すとき，

$k = \boxed{(イ)}$，$\ell = \boxed{(ウ)}$，$m = \boxed{(エ)}$，$n = \boxed{(オ)}$

である。

(2) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{f}$，s，t を用いて表せ。

(ii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を s，t を用いて表せ。

(iii) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ および $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ を s，t を用いて表せ。

(3) $t \geqq 0$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は垂直であるとする。また，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

(i) s を t を用いて表せ。

(ii) S を t を用いて表せ。

(iii) S の最小値を求めよ。