（後期日程）

令和７年度　数　学

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，４ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。

5　解答用紙はすべて机の上に出しておくこと。机の中に入れてはいけません。

$\boxed{1}$

次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　当たりくじをちょうど 2 本含む計 10 本のくじの中から，引いたくじはもとに戻さないで，A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。このとき，A，B の 2 人が当たりくじを引く確率は $\boxed{\text{(ア)}}$ であり，A，B，C のうち少なくとも 1 人が当たりくじを引く確率は $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \boxed{\text{(ウ)}}$ である。

(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos 2x\,dx = \boxed{\text{(エ)}}$ である。

(4)　a，b を実数とする。$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + a}{x \sin x} = b$ が成り立つとき，$a = \boxed{\text{(オ)}}$ であり，$b = \boxed{\text{(カ)}}$ である。

(5)　i を虚数単位とする。複素数 $(1+i)(\sqrt{3}+i)^6$ の絶対値を r，偏角を θ（ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$）とするとき，$r = \boxed{\text{(キ)}}$ であり，$\theta = \boxed{\text{(ク)}}$ である。

(6)　x を実数とし，ベクトル $\vec{a} = (x,\ x+1,\ x+2)$，$\vec{b} = (x+1,\ x+2,\ x)$ のなす角を θ とする。

(i)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $x < 0$ のとき，$x = \boxed{\text{(ケ)}}$ である。

(ii)　x が実数全体を動くときの $\cos\theta$ の最小値は $\boxed{\text{(コ)}}$ である。

数学の試験問題は次に続く。

2

以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を整数とするとき，次が成り立つことを証明せよ。

(i) $a+b=c$ とする。このとき，a, b, c の少なくとも1つは偶数である。

(ii) $a^2+b^2=c^2$ とする。このとき，a, b の少なくとも1つは偶数である。

(2) (i) $t>0$ のとき，$\log t \leqq t-1$ が成り立つことを証明せよ。

(ii) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された連続関数で，常に $f(x)>0$ であり

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする。このとき，(i) の結果を用いて

$$\int_0^1 \log f(x)\,dx \leqq 0$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} (\sqrt{2}\,)^{x^2} \leqq 4^{x+y} \\ y \leqq \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ。

数学の試験問題は次に続く。

3

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f_n(x)$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) を

$$f_1(x) = (x^2 - 2x + 5)e^x$$
$$f_{n+1}(x) = f_n'(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。

(i) $f_2(x)$ を求めよ。

(ii) 関数 $f_n(x)$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) は実数 a_n, b_n を用いて

$$f_n(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$$

と表せることを，n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。

(iii) (ii) における a_n, b_n を n を用いて表せ。

(2) n を自然数とし，$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ とおく。

(i) $\int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x^2)^{n-1}\}\,dx = a_n$ であることを示せ。

(ii) x を実数とするとき，次の和を求めよ。

$$S = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x^2)^{n-1}$$

(iii) $x = \tan\theta$ とおくことにより，定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(iv) x を実数とするとき，$\frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqq x^{2n}$ が成り立つことを示せ。

(v) 次が成り立つことを示せ。

$$-\frac{1}{2n+1} \leqq (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n+1}$$

(vi) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。